



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

UNIVERSITÀ LA SAPIENZA DI ROMA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Fisica

I PARADOSSI DEL MODELLO COSMOLOGICO STANDARD E IL MODELLO INFLAZIONARIO

Dissertazione di Laurea in Fisica

Relatore interno:
Prof. Giovanni Montani
Relatore esterno:
Dr. Massimiliano Lattanzi

Presentata da:
Dario Cortese

Anno Accademico 2009-2010

Indice

1	L'Universo omogeneo e isotropo in espansione	3
1.1	Il principio cosmologico	3
1.2	La metrica di Robertson-Walker	5
1.3	Il tensore energia-impulso dell'Universo	7
1.4	L'equazione di Friedmann	8
1.5	La scelta dell'equazione di stato	10
1.6	Dinamica di FRW	11
1.7	Orizzonte cosmologico	13
2	I paradossi del Modello Cosmologico Standard	15
2.1	I primi istanti dell'Universo	15
2.2	Fine Tuning e piattezza	16
2.3	Entropia	18
2.4	<i>Unwanted Relics</i> : i fossili indesiderati	18
3	Inflation	20
3.1	La soluzione di <i>de Sitter</i>	20
3.2	Il meccanismo dell'Inflation	21
3.3	La soluzione dei paradossi	23
	Bibliografia	26

Introduzione

La cosmologia fisica attuale fonda le sue asserzioni sul Modello Cosmologico Standard (SCM), le cui fondamenta teoriche furono gettate, tra gli altri, dai lavori di Alexander Friedmann, Howard Robertson, Georges Lemaitre e Arthur Walker, tra il 1920 e il 1930. Basato sulla particolare assunzione di isotropia e omogeneità su larga scala dell'Universo - nota come *Principio Cosmologico*, il modello prevedeva uno spazio-tempo in espansione a partire da una singolarità iniziale, e condusse negli anni '50 alla *Teoria del Big Bang* di George Gamow, secondo cui l'Universo si sarebbe evoluto da uno stato iniziale estremamente denso e caldo.

Contrapposta a quella dell'Universo Stazionario, che prevedeva una continua generazione di materia durante l'espansione, la Teoria del Big Bang riscosse un successo schiacciante nel 1965, quando Arno Penzias e Robert Wilson rilevarono la Radiazione di Fondo Cosmico (CMBR), che rappresentava il residuo della fase iniziale e andò ad aggiungersi alle ulteriori prove ottenute da Hubble nel 1929 a favore del Principio Cosmologico.

Tuttavia, agli inizi degli anni '70, il Modello Cosmologico Standard fu accusato di inconsistenza anche se non venne mai messo seriamente in discussione. Infatti, utilizzando le equazioni di evoluzione del modello e le osservazioni sullo stato attuale dell'Universo, si ottenevano delle condizioni iniziali estremamente particolari. Anche se questa non rappresentava di per sé una prova di falsificazione della teoria, molti cosmologi non accettavano di buon grado un così forte *fine tuning*, rifiutando di ammettere che lo stato attuale dell'Universo fosse un caso fortuito e altamente improbabile. Furono trovati almeno quattro capi d'accusa a *SCM*, e la comunità scientifica si operò per diversi anni nel tentativo risolvere questi paradossi.

Nel 1981 Guth prima, Linde, Albrecht e Steinhardt poi, proposero una soluzione che prevedeva una fase di espansione esponenziale dell'Universo, negli istanti prossimi alla singolarità, la cui dinamica era legata alla presenza di un'ipotetica particella scalare presente nell'Universo Primordiale e la cui durata avrebbe condotto ad un Universo di volume incredibilmente maggiore a quello che si sarebbe ottenuto con un'espansione non accelerata. In un tale Universo, le condizioni iniziali considerate eccessivamente *fine tuned* sarebbero invece state molto probabili. Questo *scenario* prese il nome di *Inflation*, ed è a tutt'oggi, sviluppato in diverse varianti, il modello accettato per la descrizione dell'Universo Primordiale.

In questa dissertazione si descrive il Modello Cosmologico Standard con parti-

colare attenzione alla dinamica dell'Universo omogeneo e isotropo, se ne illustrano i paradossi, ed infine si introduce l'idea di base dell'Inflation, mostrando come vengono risolte e le apparenti inconsistenze del Modello Cosmologico Standard.

In particolare nel primo capitolo si passano in rassegna le principali prove osservative a supporto del Principio Cosmologico, si introduce la soluzione esatta delle equazioni del campo gravitazionale per un Universo con distribuzione di massa-energia isotropa e omogenea, se ne ricava l'espressione della metrica di Robertson-Walker e la sua evoluzione temporale (*Equazione di Friedmann*). Nel secondo capitolo si illustrano i paradossi del Modello Cosmologico Standard: il paradosso della piattezza, quello degli orizzonti, quello dell'entropia ed infine quello degli *unwanted relics*. Infine, nel terzo capitolo, si introduce il concetto di Inflation come fase di espansione esponenziale dell'Universo, se ne descrive qualitativamente il meccanismo di base, e si mostra come questo scenario risolve i paradossi del Modello Cosmologico Standard.

Capitolo 1

L'Universo omogeneo e isotropo in espansione

Have we cold feet about the cosmos?

Ulysses, J. Joyce

La cosmologia fisica, le cui origini risalgono alla metà del 1500, ebbe per la prima volta un tentativo di formulazione scientifica completa nella Teoria della Gravitazione di Newton [1]. Nel 1916, la Teoria della Relatività Generale [2] rivoluzionò la maniera di fare cosmologia, introducendo l'idea che la gravità fosse una forza di natura geometrica la cui sorgente è la materia-energia, e aprendo nuove vie legate alle proprietà dell'Universo su scala cosmica. Si riportano le equazioni di campo di Einstein:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

dove:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$$

è detto tensore di Einstein, $T_{\mu\nu}$ è il tensore energia-impulso nel quale sono contenute le informazioni sulla materia (cariche e masse) e $R_{\mu\nu}$ è il *tensore di Ricci* che dipende non linearmente dal *tensore metrico* $g_{\alpha\beta}$ e dalle sue derivate prime e linearmente dalle sue derivate seconde, infine $\mathcal{R} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ è detta curvatura scalare di Ricci.

Un modello dell'Universo è dato da una soluzione delle Equazioni di Einstein, che deve determinare:

- una particolare varietà semi-Riemanniana (definita da una *metrica* in specifiche coordinate);
- una particolare distribuzione di materia definita sulla suddetta varietà.

1.1 Il principio cosmologico

Il modello attuale dell'Universo, detto *Modello Cosmologico Standard*, si fonda su un assunto molto forte, di omogeneità e isotropia. L'asserzione secondo cui l'Universo sia omogeneo e isotropo prende il nome di *Principio Cosmologico*, appellativo che venne attribuito da Milne nel 1935 ad un'idea di Albert Einstein. Molto probabilmente dettato da questioni ideologiche di eleganza, fu subito ben accetto dalla comunità scientifica, per via delle conferme sperimentali e della notevole semplificazione che introduceva nella risoluzione delle equazioni (1.1).

Il principio, nella sua forma più completa si può enunciare come segue:

E' possibile definire nello spazio-tempo una famiglia di sezioni spaziali, tali che su ciascuna di esse l'Universo abbia le stesse proprietà fisiche in tutti i punti e in ogni direzione.

O, più semplicemente:

L'Universo è spazialmente omogeneo e isotropo.

La radiazione cosmica di fondo

Una forte evidenza sperimentale del Principio Cosmologico si ebbe nel 1965 [3], quando Penzias e Wilson captarono un misterioso eccesso di rumore nella loro antenna radio, a frequenze caratteristiche delle microonde. Il rumore, non dovuto a sorgenti localizzate ed uguale in tutte le direzioni di osservazione, corrispondeva alla radiazione prodotta da una distribuzione di corpo nero a temperatura di 2.73 Kelvin. La radiazione inoltre, escluse le anisotropie dovute alla disomogeneità nella distribuzione di materia nell'Universo (presenza di galassie e ammassi) presentava un'alta isotropia: $\frac{\delta T}{T} \lesssim 10^{-4}$

Già nel 1948, George Gamow [4], Ralph Alpher, and Robert Herman avevano previsto la rivelazione di un tale segnale come un residuo termico della fase iniziale che avrebbe dato origine all'Universo.

Il segnale captato da Penzias e Wilson, comunemente denominato *CMBR* (*Cosmic Microwave Background Radiation*), può essere interpretato come una forte evidenza sperimentale dell'isotropia su larga scala dell'Universo. Come si vedrà in seguito, il CMBR è anche una fonte di informazioni e oggetto di indagini fondamentali per lo studio dei primi istanti di vita dell'Universo.

L'Universo in espansione. Legge di Hubble

Le prime semplici soluzioni esatte delle equazioni (1.1) in accordo con il Principio Cosmologico avevano un andamento dinamico, cioè rappresentavano un Universo in espansione. Ciò non piacque ad Einstein, perché contrastava con la sua idea di un Universo statico ed immutabile. Nel 1917, Einstein [5] generalizzò quindi le equazioni aggiungendo un termine 'cosmologico' $+\Lambda g_{\mu\nu}$ al primo membro delle (1.1) che divennero quindi:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1.2)$$

L'introduzione della costante cosmologica, non dipendente in generale dallo stato del campo gravitazionale, significherebbe attribuire allo spazio-tempo una curvatura in linea di massima non eliminabile e che non è legata né alla materia, né alle onde gravitazionali. Tuttavia, fin da subito non vi fu nessun motivo fondato e convincente per poter apportare un tale cambiamento nelle equazioni fondamentali della teoria.

A dispetto della correzione di Einstein, nel 1929 Edwind Hubble [6] scoprì che esisteva una relazione lineare tra lo spostamento verso il rosso (*redshift*) della luce emessa dalle galassie e la loro distanza dal punto di osservazione (Fig.(1.1)). La legge è espressa dalla semplice relazione

$$z = H_0 d / c \quad (1.3)$$

dove z è il redshift e H_0 è detta *costante di Hubble*. Se si interpreta grossolanamente il redshift come effetto Doppler¹, si giunge alla conclusione che le galassie si allontanano, cioè che attualmente l'Universo è in espansione. Inoltre, il fatto che la velocità di recessione sia proporzionale alla distanza, esattamente come avviene in qualunque mezzo soggetto a dilatazione uniforme, è in accordo col Principio cosmologico. In altre parole, pur non significando il fatto che la Terra sia al centro dell'Universo, la legge di Hubble è una prova concreta dell'isotropia dello spazio.

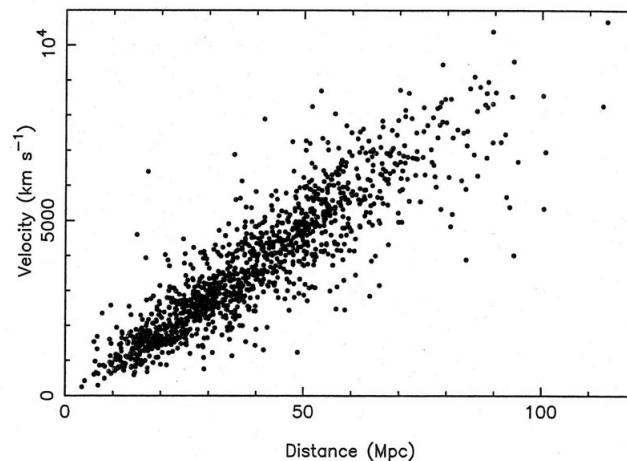


Figura 1.1: Il grafico raffigura le velocità di recessione di 1355 galassie in funzione delle rispettive distanze dalla Terra. Trascurando le incertezze e i moti galattici casuali, l'andamento è lineare.

¹L'approssimazione è valida solo per $z \ll 1$

1.2 La metrica di Robertson-Walker

Per determinare la metrica dello spazio omogeneo e isotropo occorre innanzitutto scegliere un sistema di *coordinate co-moventi*. Con questo sistema di coordinate sia il tempo che l'espansione dell'Universo possono essere trascurate per concentrarsi unicamente sulla forma dello spazio. In questa costruzione ci si immagina un set di osservatori, ciascuno con orologio sincronizzato con quello dei "vicini", e ciascuno vincolato alla posizione di moto media delle galassie.

In queste coordinate l'elemento di linea può essere scritto:

$$ds^2 = dt^2 + g_{ij}dx^i dx^j = dt^2 - dl^2 \quad (1.4)$$

sfruttando il fatto che $g_{0\alpha} = 0$, poiché l'isotropia consente di sincronizzare gli orologi "vicini" e l'omogeneità di estendere la sincronizzazione a tutto lo spazio.

La curvatura dello spazio isotropo è determinata completamente dal suo tensore di curvatura tridimensionale, R_{ijkl} , che nel caso di isotropia completa deve esprimersi mediante il solo tensore metrico g_{ij} , e in virtù delle sue proprietà di simmetria, deve assumere la forma²:

$${}^3R_{ijkl} = \lambda(g_{ij}g_{kl} - g_{il}g_{jk}) \quad (1.5)$$

dove λ è una costante. Il tensore di Ricci $R_{ij} = R^k{}_{ikj}$ uguale a:

$${}^3R_{ij} = 2\lambda g_{ij} \quad (1.6)$$

e la curvatura scalare $\mathcal{R} = 6\lambda$. Le proprietà della curvatura dello spazio sono quindi completamente determinate da una sola costante. Ne segue che sono possibili tre casi essenzialmente differenti di metrica spaziale: a curvatura costante positiva ($\lambda > 0$), negativa ($\lambda < 0$), nulla ($\lambda = 0$), cioè lo spazio piatto euclideo. E' possibile far vedere che lo spazio a curvatura positiva ha un volume finito (*modello chiuso*), mentre gli altri due sono entrambi *modelli aperti*.

Per un modello chiuso, la simmetria sferica discendente dall'isotropia implica:

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - r^2/R^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (1.7)$$

che è l'elemento di linea di una 3-sfera di raggio R ($\lambda = 1/R^2$).

E' possibile descrivere la 3-sfera come ipersuperficie in uno spazio euclideo quadrimensionale, introducendo le coordinate polari nello spazio ambiente: (R, χ, θ, ϕ) . In queste coordinate la 3-sfera può essere parametrizzata dalle:

$$\begin{cases} w = R \cos \chi \\ z = R \sin \chi \\ x = R \sin \chi \sin \theta \cos \phi \\ y = R \sin \chi \sin \theta \sin \phi \end{cases} \quad (1.8)$$

²Per una trattazione più dettagliata si veda [7]

e la metrica può scriversi:

$$dl^2 = R^2[d\chi^2 + \sin^2 \chi(\sin^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2)] \quad (1.9)$$

Il volume della 3-sfera

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi R^3 \sin^2 \chi \sin \theta \, d\chi \, d\theta \, d\phi = 2\pi^2 R^3$$

è un valore finito: lo spazio tempo risulta quindi “chiuso in sé stesso”, se pur senza frontiere.

Un’analoga costruzione geometrica si può effettuare nel caso di spazio-tempo aperto e piatto. Per il modello aperto - a curvatura negativa - è possibile ricavare l’espressione dell’elemento di linea con la sostituzione $R \rightarrow iR$; in questo caso la costante $\lambda = -1/R^2$, e il volume è infinito. Il modello piatto può essere ottenuto nel limite $R \rightarrow \infty$, anch’esso è senza frontiere e di volume infinito. Nello spazio piatto il raggio R non rappresenta alcun raggio fisico, ma è un fattore di dilatazione (o contrazione) per le distanze fisiche tra punti *co-moventi*. Per questo motivo R è spesso chiamato *fattore di scala*.

Per un modello dinamico (in contrazione o in espansione), generalizzando la (1.7) e sostituendo $r \rightarrow r/R$, la (1.4) diventa:

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (1.10)$$

nella quale è stata introdotta la possibilità di espansione (R dipende da t) e il parametro k che tiene conto dei tre possibili modelli:

CHIUSO (3-sfera): $k = 1$ (Fig.1.2)

APERTO (3-iperboloide) : $k = -1$ Figura 1.2)

PIATTO ($R \rightarrow \infty$): $k = 0$.

Le tre metriche espresse dall’invariante (1.10) vengono denominate di *Robertson - Walker* [8][9], e rappresentano la soluzione esatta delle equazioni di campo (1.1) adottata nel modello cosmologico standard.

Si noti che la (1.10) non è stata derivata risolvendo le (1.1), ma dalle condizioni di simmetria imposte al modello. Inoltre, seppure la geometria locale rimane completamente determinata una volta scelto k , la topologia dello spazio-tempo rimane indeterminata, e dipende dalle condizioni di bordo.

E’ conveniente riscrivere la metrica in termini del *tempo conforme* η definito da $d\eta = dt/R(t)$:

$$ds^2 = R^2(\eta) \left[d\eta^2 - \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (1.11)$$

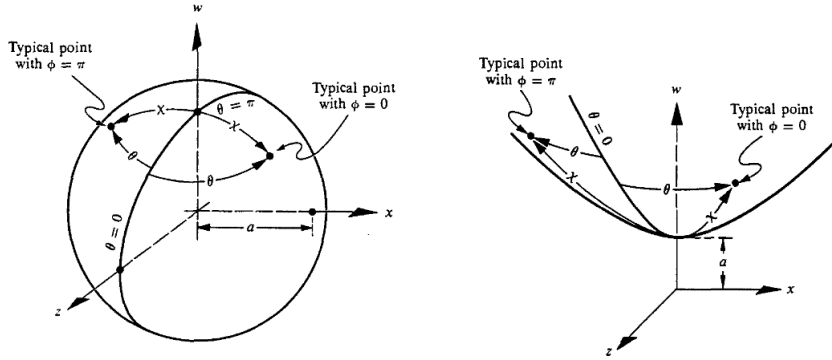


Figura 1.2: 3-sfera e 3-iperboloide con raggio di curvatura $R = a \sin \chi$ nello spazio euclideo 4-dimensionale. Un grado di libertà è stato eliminato ponendo $\phi = 0$ e $\phi = \pi$.

Redshift cosmologico

La luce emessa da oggetti lontani può essere studiata classicamente come propagazione di onde piane o quantisticamente come fotoni in propagazione libera. Nella seconda ipotesi, per la legge di de Broglie $\lambda = h/p$. Se l'impulso cambia, la lunghezza d'onda deve cambiare a sua volta. E' possibile dimostrare, a partire dall'equazione di Hamilton-Jacobi per il moto lungo una geodetica di una particella qualsiasi, che l'impulso di quest'ultima è inversamente proporzionale al fattore di scala R :

$$|\vec{p}| \propto R^{-1} \quad (1.12)$$

Utilizzando la relazione (1.12), possiamo scrivere:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_0} = \frac{R(t_1)}{R(t_0)} \quad (1.13)$$

dove λ_0 e λ_1 sono le lunghezze d'onda di un fotone agli istanti t_0 e t_1 . Quindi, in un Universo in espansione, λ si dilata, come ogni altra distanza. Lo spostamento verso il rosso nello spettro di frequenza (*red shift*), associato appunto ad un aumento della lunghezza d'onda, può essere attribuito al fatto che l'Universo nel quale il fotone è stato emesso era più piccolo di quello nel quale viene osservato.

La definizione di *redshift* è data in astronomia dall'espressione:

$$z(t) \equiv \frac{\lambda_0}{\lambda_e} - 1 = \frac{R(t_0)}{R(t)} - 1 \quad (1.14)$$

dove λ_0 è la lunghezza d'onda osservata nel momento presente ed è fissata al valore misurato, e λ_e è la lunghezza d'onda emessa dalla sorgente al tempo t . Ogni aumento in $R(t)$ porta ad uno spostamento verso il rosso della luce proveniente dalla sorgente. Come abbiamo già visto, gli astronomi fino ad oggi hanno rilevato

un redshift nella luce proveniente dalle galassie, e possiamo interpretare questa come una forte prova sperimentale dell'espansione dell'Universo.

1.3 Il tensore energia-impulso dell'Universo

Per ricavare la dinamica dell'Universo omogeneo e isotropo, è necessario risolvere le equazioni di campo di Einstein (1.1); è necessario quindi decidere come rappresentare il tensore energia-impulso $T_{\mu\nu}$ nel caso in esame. Essendo interessati a trattare l'Universo su larga scala, possiamo considerare le galassie come "particelle" di un "gas" che riempie l'Universo. Se si richiede inoltre che le galassie siano distribuite uniformemente nello spazio e abbiano distribuzione di velocità isotropa, il gas considerato è un *fluido perfetto*.

Si tratta di un'idealizzazione apparentemente grossolana, in quanto si trascurano la struttura interna e la tendenza a presentarsi in ammassi delle galassie, ma più che valida se ci si propone di studiare gli effetti su larga scala della presenza di materia.

Se scegliamo di caratterizzare il fluido con una 4-velocità u^α , la densità di massa-energia ϱ e la pressione p (dovuta al moto delle galassie), il tensore energia-impulso può scriversi:

$$T_{\mu\nu} = (\varrho + p)u_\mu u_\nu - p \quad (1.15)$$

che nel sistema di quiete del fluido, nel quale $u_\mu = (1, 0, 0, 0)$, diventa:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \varrho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

dove si sono sfruttate le proprietà notevoli di isotropia, l'assenza di viscosità e di sforzi trasversali, e le grandezze $\varrho(t)$ e $p(t)$ dipendono dal tempo.

1.4 L'equazione di Friedmann

Le equazioni dinamiche dell'Universo sono delle equazioni che descrivono l'evoluzione del fattore di scala $R(t)$ seguono dalle Equazioni di Einstein per la metrica di Robertson-Walker. Le componenti non nulle del tensore di Ricci per questa metrica, sono:

$$R_{00} = -3\ddot{R}/R, \quad R_{ij} = -\left(\frac{\ddot{R}}{R} + 2\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{2k}{R^2}\right)g_{ij} \quad \mathcal{R} = -6\left(\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2}\right)$$

La componente $\mu = 0, \nu = 0$ delle (1.1), ci da l'*Equazione di Friedmann*:

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} = \frac{8\pi G}{3} \varrho \quad (1.17)$$

Mentre dalle componenti spaziali:

$$2\frac{\ddot{R}}{R} + 2\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} = -8\pi G p \quad (1.18)$$

La (1.17) e la (1.18), rappresentano le due equazioni di campo; come vedremo si può aggiungere a queste un'ulteriore equazione, ricavata a partire dalla legge di conservazione del tensore energia-impulso. Il modello di Universo descritto dalla metrica di Robertson-Walker (1.10) e dalle equazioni di campo in questione viene comunemente chiamato *FRW* o *FLRW*, dai nomi di Friedmann [12], Lemaitre[13], Robertson e Walker che contribuirono alla sua formulazione matematica esatta. Le equazioni nel caso in cui si considera il termine cosmologico, si modificano attraverso le sostituzioni:

$$\varrho \rightarrow \varrho + \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}, \quad p \rightarrow p - \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} \quad (1.19)$$

La velocità di espansione dell'Universo è determinata dalla *costante di Hubble* $H \equiv \dot{R}/R$, il cui valore attuale è indicato con H_0 . In generale, è possibile far vedere che se $R \propto t^n \Rightarrow H \propto t^{-1}$. Il *tempo (raggio) di Hubble* $t_H = H^{-1}$ determina la scala temporale dell'espansione, infatti localmente (per H costante):

$$RH = \dot{R} \Rightarrow R(t) = R(t_0)e^{H_0 t} \Rightarrow R(t_H) = R(t_0)e$$

Quindi R cresce di un fattore e in un tempo H^{-1} .

L'equazione di Friedmann può essere riscritta in termini di H :

$$\frac{k}{H^2 R^2} = \frac{\varrho}{3H^2/8\pi G} - 1 \equiv \Omega - 1 \quad (1.20)$$

dove: $\Omega \equiv \varrho/\varrho_c$, e $\varrho_c \equiv 3H^2/8\pi G$ è detta *densità critica*.

Poiché $H^2 R^2 \geq 0$, dalla (1.20) segue che il segno di k impone una condizione sul segno di $\Omega - 1$:

$$k = +1 \Rightarrow \Omega > 1 \text{ (modello **CHIUSO**)}$$

$$k = 0 \Rightarrow \Omega = 1 \text{ (modello **PIATTO**)}$$

$$k = -1 \Rightarrow \Omega < 1 \text{ (modello **APERTO**)}$$

Pertanto la geometria locale dell'Universo dipende dalla sua densità. L'equazione (1.20) è valida per tutti i tempi, inoltre ϱ_c non è costante ma varia con l'espansione.

Un altro parametro di fondamentale importanza per descrivere la dinamica di FRW è il parametro di decelerazione: $q_0 = -\ddot{R}/RH_0^2$. Facendo il rapporto tra la (1.22) e la (1.17), e usando la definizione di Ω_0 :

$$q_0 = \Omega_0(1 + 3p/\varrho)/2 = \Omega_0(1 + 3w)/2$$

dove $w = p/\varrho$ è il parametro dell'equazione di stato dell'Universo, che assumiamo costante.

La curvatura spaziale della metrica del modello FRW è ${}^3\mathcal{R} = 6k/R^2(t)$, che con la (1.20) diventa ${}^3\mathcal{R} = 6H^2(\Omega - 1)$. Da come è fatta la metrica RW (1.10), data l'espressione al denominatore del primo termine in parentesi, è evidente che gli effetti di ${}^3\mathcal{R}$ diventano significativi per $r \sim |k|^{-1/2}$. E' conveniente definire quindi un *raggio di curvatura fisico* dell'Universo:

$$R_{curv} \equiv R(t)|k|^{-1/2} = \left(\frac{6}{|{}^3\mathcal{R}|} \right)^{1/2} = \frac{H^{-1}}{|\Omega - 1|^{1/2}} \quad (1.21)$$

che nel caso di modello chiuso ($k > 0$) è proprio il raggio fisico della 3-sfera. Quando $|\Omega - 1| \approx 1$ il raggio di curvatura è confrontabile con il *raggio di Hubble* H^{-1} ; quando $|\Omega - 1|$ è molto piccolo, $R_{curv} \gg H^{-1}$. Un Universo vicino alla densità critica ϱ_c è quindi molto piatto.

La singolarità $R(t) = 0$

Per differenza dalle due equazioni di Friedmann si ottiene una relazione per l'accelerazione:

$$\frac{\ddot{R}}{R} = \frac{4\pi G}{3}(\varrho + 3p) \quad (1.22)$$

Attualmente $\dot{R} \geq 0$; se nel passato il termine $\varrho + 3p$ fosse sempre stato positivo, \ddot{R} sarebbe sempre stato negativo, e quindi esisterebbe un tempo finito t tale che $R(t) = 0$.

Come vedremo, in tutti i modelli dinamici, per $t = 0$ è presente una singolarità, e si potrebbe verificare calcolando il tensore di Riemann che è una singolarità reale. La singolarità potrebbe tuttavia essere una peculiarità di questi modelli, che hanno un'elevata simmetria, discendente dal principio cosmologico. Si potrebbe sospettare che scostamenti anche piccoli dalla simmetria la facciano sparire, in altre parole: se le geodetiche della materia non fossero tutte radiali, non è detto che debbano passare tutte per uno stesso punto. Una risposta a questo problema è stata data da Hawking [10] e Penrose [11] che hanno mostrato sotto alcune ipotesi precise ma sufficientemente ragionevoli dal punto di vista fisico che *la singolarità è inevitabile*.

1.5 La scelta dell'equazione di stato

Prima di risolvere l'equazione di Friedmann, e trovare le espressioni di $R(\eta)$ nella (1.11), è necessario completare le equazioni di Einstein con una equazione di stato per la materia.

Innanzitutto possiamo notare che nell'approssimazione fatta nel paragrafo precedente, la componente $\mu = 0$ della legge di conservazione $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$, ci da:

$$d(\varrho R^3) = -p dR^3 \quad (1.23)$$

che è il *Primo Principio della Termodinamica*, e può essere considerata la terza equazione di campo. La (1.17), (1.18) e la 1.23, così come le equazioni di Einstein e la legge di conservazione di $T^{\mu\nu}$ sono però correlate dall'identità di Bianchi, motivo per cui solo due di esse possono essere considerate indipendenti. Il significato immediato della (1.23) è che la variazione d'energia in un elemento di volume co-movente, $d(\varrho R^3)$, è uguale alla pressione per la variazione di volume, $-pd(R^3)$. Integrando, possiamo derivare che per un'equazione di stato semplice del tipo $p = w\varrho$ (con w indipendente dal tempo):

$$\varrho \propto R^{-3(1+w)} \quad (1.24)$$

Occorre allora a questo punto analizzare la densità di massa-energia ϱ dell'Universo. Dall'analisi della radiazione cosmica di fondo grazie alle rilevazioni di WMAP [14] è possibile individuare prevalentemente tre importanti contributi alla densità ϱ , espressi in termini delle rispettive $\Omega_i = \varrho_i/\varrho_c$ con $i = m, r, \Lambda$:

- la materia barionica : ϱ_b [$\Omega_b \simeq 0.05$], nella quale vengono considerati soltanto i barioni, e possono essere trascurati i leptoni perché molto più leggeri;
- la radiazione (elettromagnetica, gravitazionale, neutrini non massivi): $\varrho_r = \varrho_\nu + \varrho_\gamma$ [$\Omega_{r0} \simeq 8 \cdot 10^{-5}$, nell'epoca presente del tutto trascurabili.
- un contributo ϱ_Λ [$\Omega_\Lambda \simeq 0.73$] denominato *energia del vuoto* o *energia oscura*, che come vedremo è caratterizzato da un'equazione di stato con $w = -1$;
- la densità di *materia oscura* ϱ_{dm} [$\Omega_{dm} \simeq 0.22$], che per la prima volta fu derivata dall'analisi della dinamica delle galassie.³

Lasciando inizialmente da parte le componenti "oscure", si delineano quindi da subito due possibili scenari: uno per un Universo nel quale predomina la densità di energia dovuta alla radiazione, e l'altro dominato invece dalla materia.

Nel primo caso, trattandosi di particelle di massa nulla (fotoni, neutrini, gravitoni), l'equazione di stato da affiancare alle Equazioni di Einstein è:

$$p_r = \frac{1}{3} \varrho_r \quad (1.25)$$

e pertanto:

$$\varrho_r \propto R^{-4} \quad (1.26)$$

³Assumendo che gli ammassi galattici siano sistemi legati e applicando il teorema del viriale, dall'energia cinetica - che è misurabile a partire dai moti delle galassie - si risale ad un potenziale che richiede una massa maggiore di quella visibile per circa un fattore 10.

Nel secondo caso, inglobando tutte le componenti di materia in $\varrho_m = \varrho_{dm} + \varrho_b$ possiamo ricorrere alla (1.23), con $p_m = 0$:

$$\varrho_m \propto R^{-3} \quad (1.27)$$

I due casi, dai quali scaturiranno due diverse descrizioni della dinamica dell'Universo, sono solitamente applicati allo studio di diverse epoche della storia dell'Universo. Attualmente, $p_m \ll \varrho_m$ e si può considerare l'Universo dominato dalla materia (*modello di Friedmann*); ma quando R è molto piccolo, il contributo della radiazione (1.26) diventa enormemente maggiore, e quindi per epoche dell'Universo molto prossime alla sua nascita si considera un modello dominato dalla radiazione.

A questi due casi, e ai conseguenti modelli dinamici, va aggiunto il caso in cui a dominare è il contributo di *energia oscura* che può essere introdotto nelle Equazioni di Einstein (1.2) attraverso la costante cosmologica Λ :

$$p = -\varrho_\Lambda \Rightarrow w = -1 \Rightarrow \varrho_\Lambda = \text{cost.} \quad (1.28)$$

dove $\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4} \varrho_\Lambda$.

Quest'ultimo termine ha assunto un ruolo molto importante negli ultimi anni, dopo che la sonda spaziale *WMAP* ha rivelato dall'analisi delle anisotropie del *CMBR* che l'Universo è quasi completamente piatto e la sua espansione è in accelerazione. Come si vedrà nel prossimo paragrafo, la piattezza su larga scala si traduce in una condizione sulla densità totale, che deve essere prossima ad un valore critico ϱ_c , del quale solo il 30% è osservato nel *CMBR*. A questo scopo viene introdotta l'*energia oscura*. La sua spiegazione più semplice è che un volume di spazio ha dell'energia intrinseca e fondamentale che è rappresentata appunto dalla costante cosmologica Λ (da cui il modello *Lambda-CDM*). Talvolta è chiamata energia del vuoto in quanto è la densità dell'energia presente in stato latente nello spazio anche quando privo di materia. Dalla (1.28), Λ ha una pressione negativa equivalente alla densità della sua energia e per questo motivo fa sì che l'espansione dell'Universo acceleri. La (1.28) d'altronde può essere compresa pensando che la quantità di energia in un contenitore vuoto in realtà aumenta quanto il suo volume aumenta (e quindi dV è positivo).

1.6 Dinamica di FRW

L'equazione per il fattore di scala $R(t)$, che contiene le informazioni sulla dinamica di FRW, a questo punto può essere ricavata dalle diverse soluzioni dell'equazione di campo accoppiata all'equazione di stato scelta. Le equazioni di Friedmann possono essere risolte nei tre casi di Universo dominato dalla materia, dalla radiazione o dalla costante cosmologica (*Modelli di Friedmann*), ricordando che in generale⁴ $\varrho/\varrho_0 \propto (R/R_0)^{-3(1+w)}$, e sostituendo nella (1.17):

⁴Qui come nel seguito il pedice 0 indica che ci si riferisce al valore assunto dalla grandezza nel tempo presente

$$\dot{R}^2 = R_0^2 \left[\varrho_0 \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{R_0}{R} \right)^{(1+3w)} \right] - k \quad (1.29)$$

A partire dall'equazione di Friedmann scritta in questo modo è possibile studiare la dinamica dei modelli possibili, per $\varrho = \varrho_m, \varrho_r, \varrho_\Lambda$ nel caso di geometria chiusa, aperta e piatta ($k = 1, -1, 0$). L'evoluzione temporale del fattore di scala nei tre modelli di Friedmann, e per il modello è rappresentata in Fig. 1.3.

Come già anticipato (vedi par.1.5), l'Universo recente può essere schematizzato molto bene con un modello dominato dalla materia, per il quale l'equazione di stato è $p = 0$ e $\varrho \propto R^{-3}$. In questo caso quindi $w = 0$, e la (1.29) diventa:

$$\frac{\dot{R}^2}{R_0^2} + \frac{k}{R_0^2} = \frac{8\pi G}{3} \varrho_0 \frac{R_0}{R} \quad (1.30)$$

In un epoca passata, in cui R doveva essere ancora piccolo, dato che $\varrho_r \propto R^{-4}$ è stata la radiazione a dominare l'Universo. In questo caso l'equazione da studiare è:

$$\frac{\dot{R}^2}{R_0^2} + \frac{k}{R_0^2} = \frac{8\pi G}{3} \varrho_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \quad (1.31)$$

Infine, per un Universo dominato dalla costante cosmologica $\varrho_\Lambda = cost.$, e inserendo $\Omega_\Lambda = \Lambda/3H_0^2 = R^2\Lambda/3\dot{R}^2$:

$$\dot{R}^2 = R_0^2 \frac{\Lambda}{3} - k \quad (1.32)$$

Possiamo quindi analizzare le soluzioni per i modelli chiusi, aperti e piatti.

Universo chiuso

In un Universo dominato dalla materia (Friedmann) e dalla radiazione, le (1.30), (1.31) possono essere risolte ponendo $\frac{8}{3}\pi\varrho_0 R_0^3 = R_{max}[MD]$ e $\frac{8}{3}\pi\varrho_0 R_0^4 = R_{max}^2[RD]$. Si ha⁵:

$$\begin{aligned} \dot{R}^2 + k &= \frac{R_{max}}{R} & [MD] \\ \dot{R}^2 + k &= \frac{R_{max}^2}{R^2} & [RD] \end{aligned}$$

Che hanno soluzioni:

$$\begin{cases} R = \frac{1}{2}R_{max}(1 - \cos \eta) & [MD] \\ t = \frac{1}{2}R_{max}(\eta - \sin \eta) \end{cases} \quad (1.33)$$

⁵Nel seguito si farà uso delle abbreviazioni MD (*matter dominated*) e RD (*radiation dominated*) per riferirsi ai modelli dominati dalla materia e dalla radiazione, VAC (*vacuum dominated*) per quelli dominati dall'energia del vuoto.

$$R(t) = \sqrt{t(2R_{max} - t)} \quad [RD] \quad (1.34)$$

Le due soluzioni hanno un andamento qualitativo molto simile (vedi Fig.1.3). Per soluzioni di questo tipo, lo spazio-tempo non può espandersi oltre $R = R_{max}$. Nell'avvicinarsi a questo valore \dot{R} decrescerà col procedere dell'espansione, fino ad annullarsi. Dopo aver raggiunto il limite consentito, il sistema si ricontrarrà.

In un Universo dominato da Λ , si ha invece una soluzione ad espansione esponenziale:

$$R(t) = R_{\Lambda} \cosh(t/t_{\Lambda})$$

con $R_{\Lambda} = t_{\Lambda}$ e $t_{\Lambda} = \sqrt{3/\Lambda}$

A questo tipo di soluzione ci si riferisce spesso con il nome di soluzione *inflazionaria*, e se ne parlerà più ampiamente nel seguito.

Universo piatto

Per il modello piatto, chiamato anche di *Einstein-de Sitter* le (1.30),(1.31) con $k = 0$, si semplificano notevolmente. Le soluzioni sono:

$$R(t) = \left(\frac{3}{2}R_{max}^{1/2}t\right)^{2/3} \quad [MD] \quad (1.35)$$

$$R(t) = \sqrt{2R_{max}t} \quad [RD] \quad (1.36)$$

Questo modello corrisponde ad uno spazio-tempo con sezioni spaziali piatte, e descrive un Universo che continua ad espandersi all'infinito, anche se con velocità tendente a zero. Per un Universo dominato dal vuoto, anche in questo caso l'espansione avviene esponenzialmente:

$$R(t) = R_{\Lambda}e^{t/t_{\Lambda}} \quad (1.37)$$

Universo aperto

In questo caso le soluzioni sono identiche a quelle del modello chiuso, con le sostituzioni delle funzioni trigonometriche iperboliche $\cos \rightarrow \cosh, \sin \rightarrow \sinh$ nella (1.33), e $t \rightarrow -t$ nella (1.34). Anche qui l'espansione continua all'infinito, ma asintoticamente $R(t) = t$, cioè la velocità di espansione tende a c . Nel modello dominato da Λ : $R(t) = R_{\Lambda} \sinh(t/t_{\Lambda})$

1.7 Orizzonte cosmologico

Una questione fondamentale in cosmologia è quella di determinare quali parti dell'Universo osservato da un osservatore sulla Terra siano in contatto causale tra loro, cioè quali si trovano a distanza tale da poter essere percorsa da un

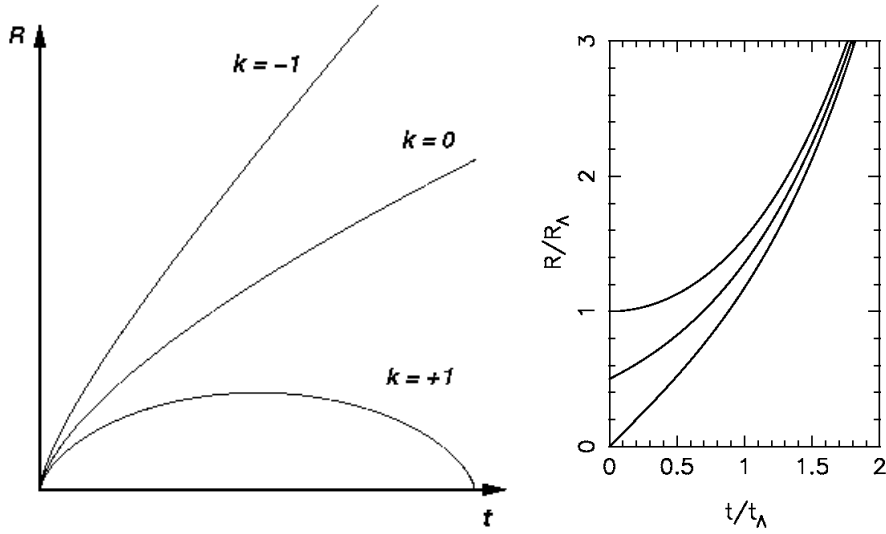


Figura 1.3: Fattore di scala $R(t)$ per modelli FRW aperti, chiusi, piatti. A sinistra: universi RD e MD. A destra: Universo dominato da Lambda (*Inflation*).

fotone. Una tale distanza d_H viene definita *orizzonte cosmologico* o *orizzonte di particella*.

E' possibile calcolare nella metrica di FRW, per quali valori (r, θ, ϕ) un segnale emesso a $t = 0$ raggiunge un osservatore posto in (r_0, θ_0, ϕ_0) entro un tempo finito t . Potendo scegliere $r_0 = 0$ per l'omogeneità, sfruttando il fatto che per un fotone $ds^2 = 0$, e che per l'isotropia posso assumere $d\phi = d\theta = 0$ senza perdita di generalità, l'intervallo di tempo in questione può essere calcolato come:

$$\int_0^t \frac{dt'}{R(t')} = \int_0^{r_H} \frac{dr}{1 - kr^2}$$

da cui:

$$d_H(t) = \int_0^{r_H} \sqrt{g_{rr}} dr = R(t) \int_0^t \frac{dt'}{R(t')} = R(t)[\eta(t) - \eta(t=0)] \quad (1.38)$$

Se $d_H(t)$ è finito, il cono di luce centrato nello stato attuale è limitato e l'orizzonte di particella calcolato in t_0 segna il confine tra l'Universo visibile e quello dal quale non ci è giunto ancora alcun segnale luminoso. Poichè $R(t) \propto t^n$ con $n < 1$ per le (1.35), $d_H(t) \propto t/(1-n)$. Quindi, malgrado tutte le distanze fisiche tendano a zero per $R \rightarrow 0$, l'espansione dell'Universo impedisce alla maggior parte delle regioni dello spazio di essere in contatto causale.

Dalla (1.36), che tiene conto della dinamica del fattore di scala nel caso in cui la curvatura sia trascurabile, si ottiene:

$$d_H(t) \propto 3t \propto H^{-1}(t) \quad [MD] \quad (1.39)$$

$$d_H(t) \propto 2t \propto H^{-1}(t) \quad [RD]$$

e al tempo presente: $d_H(t_0) = 2t_H \approx 8 \text{ Gpc}$

Come emerge dall'ultimo membro della (1.38), un segnale luminoso si propaga lungo rette a 45° nel piano η , e la proiezione del relativo cono di luce, tracciata parallelamente all'asse della coordinata spaziale, delimita l'orizzonte di particella. In figura 1.4 si è rappresentato l'orizzonte di particella per un modello chiuso, in termini della coordinata radiale χ , definita nella (1.8). Nel grafico è evidente che essendo l'Universo "opaco" alla radiazione elettromagnetica prima del tempo dell'ultima emissione di fotoni rivelata nella CMBR, l'orizzonte che delimita l'Universo visibile non coincide con quello definito al tempo presente, ma con la superficie di ultimo scattering.

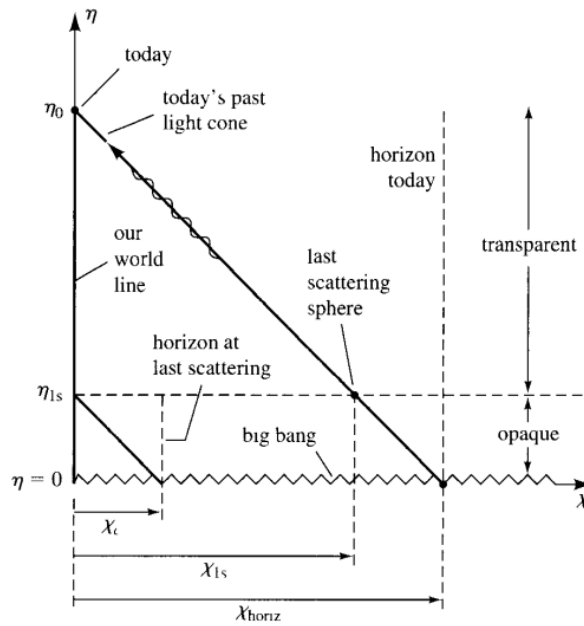


Figura 1.4: Grafico $\eta - \chi$ per un modello FRW. Il tempo scorre nella nostra posizione fissata in $\chi = 0$. η_0 è il tempo presente, $\eta = 0$ quello del big bang, η_{ls} quello dell'ultimo scattering dei fotoni della CMBR. χ_{horiz} è l'orizzonte di particella al tempo presente. χ_{ls} racchiude tutto l'Universo visibile, χ_c è l'orizzonte all'ultimo scattering CMBR.

Capitolo 2

I paradossi del Modello Cosmologico Standard

A man gazing at the stars is proverbially
at the mercy of the puddles in the road.

Alexander Smith

Il Modello Cosmologico Standard descrive l'Universo con il paradigma *FLRW*, fondato sull'assunzione di omogeneità e isotropia spaziale, sulla geometria di Robertson-Walker e sull'equazione dinamica di Friedmann. Tuttavia, il modello porta con sé degli indizi di inconsistenza derivanti da alcuni paradossi, che possono essere presi in esame per tracciarne i limiti di applicabilità. Come si vedrà nel seguito, tutti i paradossi in questione sono collegati al raccordo teorico tra lo stato attuale dell'Universo e le sue equazioni dinamiche, che porta a delle condizioni iniziali molto particolari.

2.1 I primi istanti dell'Universo

Come si è già visto, la dinamica del modello è caratterizzata da un'inevitabile singolarità all'inizio dell'espansione. Come conseguenza inevitabile dell'applicazione di *FRW*, suggerita da forti evidenze sperimentali, è la teoria del *Big Bang*, secondo cui l'Universo iniziò ad espandersi da una condizione iniziale calda e densa - che aveva portato Gamow a predire la CMBR - ad essere la più ampiamente accreditata per la descrizione dei primi istanti di vita dell'Universo.

Il tempo a partire dal quale è possibile fare supposizioni sulla storia dell'Universo è noto come *tempo di Planck*, ed è il tempo che impiegherebbe un fotone a percorrere la lunghezza di Planck:

$$\ell_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$$

che è la lunghezza d'onda di un fotone la cui energia è uguale all'energia di massa a riposo di un buco nero con raggio di Schwarzschild uguale a ℓ_P . Ogni

fotone abbastanza energetico da misurare un oggetto alla scala della lunghezza d'onda di Planck potrebbe creare una particella abbastanza massiccia da diventare un buco nero, quindi distorcendo completamente lo spaziotempo e inghiottendo un qualsiasi altro fotone. Si può interpretare questa come una prova del fatto che alla scala di Planck siano rilevanti sia gli effetti della meccanica quantistica che quelli della relatività generale; quindi, in mancanza di una teoria di gravità quantistica, non ha senso riferirsi a misure di lunghezza inferiori a ℓ_P , e pertanto ad estrapolazioni a tempi antecedenti a $t_P = \ell_P/c \approx 1,35 \cdot 10^{-43} s$.

Considerando lo spettro CMBR come uno spettro di corpo nero, e indicando con t_D l'istante del disaccoppiamento tra radiazione e materia, si può dimostrare che la temperatura dei fotoni nell'Universo è inversamente proporzionale al fattore di scala R :

$$T = T_D \frac{R_D}{R} \propto R^{-1} \quad (2.1)$$

dove $R_D = R(t_D)$ e T_D sono rispettivamente il fattore di scala e la temperatura nell'istante del disaccoppiamento.

La temperatura sotto le condizioni imposte dall'equazione di Friedmann ci obbliga quindi a supporre che l'Universo si trovasse a temperature - e, nell'assunzione di equilibrio termico $\rho \propto T^4$, anche a densità - molto alte in prossimità della singolarità iniziale; in particolare si può stimare $T \sim 10^{19}$ GeV al tempo di Planck.

La cronologia degli istanti successivi alla singolarità, caratterizzata dall'espansione e da un inevitabile raffreddamento secondo la (2.1), può essere estrapolata in base alle attuali conoscenze sulla fisica delle particelle, a partire da t_P . In principio l'Universo era un plasma di particelle relativistiche, inclusi i quark, i leptoni, i bosoni di gauge e di Higgs. Secondo le teorie più accreditate, alla temperatura di 10^{14} - 10^{16} GeV ebbero luogo un certo numero di rotture di simmetria, compresa la grande unificazione (*GUT*) di tutte le interazioni fondamentali eccetto la gravità, durante la quale i bosoni di gauge avrebbero acquisito massa tramite il meccanismo di Higgs e si sarebbero disaccoppiati dal plasma iniziale. A $T \sim 10^2$ MeV si è soliti situare il disaccoppiamento tra barioni e mesoni, e a T comprese tra 10 e 0.1 MeV si stima abbia avuto luogo la nucleosintesi. Dopo 10^{11} s dalla singolarità, la densità di materia eguaglia quella della radiazione. Questo segna l'inizio dell'era dominata dalla materia. Infine, a $t \sim 10^{13}$ s gli ioni e gli elettroni si ricombinano per formare gli atomi, mentre il disaccoppiamento tra materia e radiazione segna la fine dell'equilibrio termico iniziale. E' a quest'era che si fa risalire l'emissione della radiazione cosmica di fondo, che può essere quindi considerata una "fotografia" dell'Universo al tempo del disaccoppiamento.

2.2 Fine Tuning e piatezza

Il Paradosso dell'orizzonte

Un celebre capo d'accusa per il modello FRW, è strettamente connesso alle relazioni di causalità che intercorrono tra diversi punti dello spazio. In particolare, osservando la radiazione cosmica di fondo, che come si è visto ci “racconta” di un Universo con distribuzione di temperatura quasi totalmente omogenea e isotropa ($\delta T/T \lesssim 10^{-4}$), si pone il problema di appurare se questa eccezionale circostanza sia dovuta all'interazione tra le diverse regioni dell'Universo, o ad una qualche particolare condizione iniziale.

Si considerino due punti, le cui direzioni rispetto ad un osservatore posto in P (Fig.2.1) formano un angolo α : è possibile chiedersi per che valore di α queste possono essere in relazione causale. In $\eta = 0$ viene emesso un segnale nel punto S , che giunge in P al tempo conforme $\eta_1 = \eta(t = t_1)$, e in E al tempo $\eta_e = \eta(t = t_e)$. Da E (al tempo η_e) parte un secondo segnale che giunge in P dopo un tempo $\eta_2 = \eta(t = t_2)$. Se si considera il triangolo PSE nelle tre diverse forme della metrica (1.11), dato che nel caso in esame, al tempo dell'emissione della CMB, $R \propto t^{2/3} \Rightarrow \eta_{1,2}(t) \gg \eta(t_e) \propto d_H(t_e) \propto H_e^{-1} \propto [R_e/R_0]^{-3/2} = (1 + z_e)^{-3/2}$ per la (1.39) e la (1.38), si può dimostrare che $\alpha \lesssim 3^\circ$.

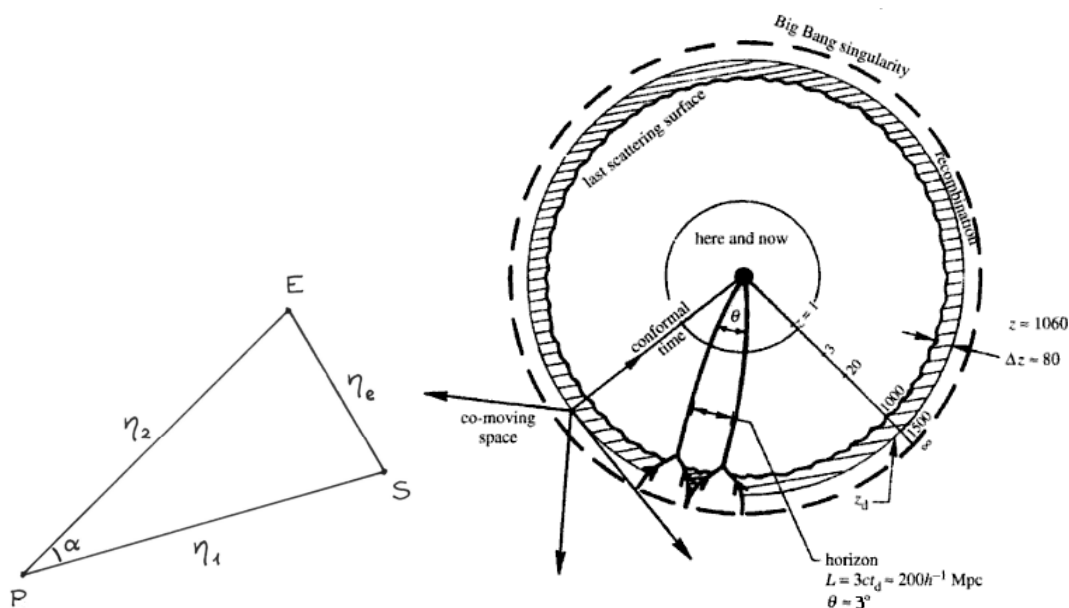


Figura 2.1: A sinistra: angolo α tra due punti causalmente sconnessi E , S , rispetto ad un osservatore in P . A destra: diagramma conforme dell'orizzonte di ultimo scattering con $\alpha \equiv \theta \sim 3^\circ$.

Se si considerano quindi nella CMBR (o, in generale, osservando il cielo) due regioni dello spazio ad angolo relativo $\alpha \gg 3^\circ$, si è certi di poterle considerare causalmente indipendenti. Il numero totale di regioni causalmente sconnesse può essere stimato tenendo conto del fatto che la sfera CMBR ha una superficie dell'ordine di $4\pi^2(cH_0^{-1})^2$, ed è ~ 1000 .

Il paradosso può quindi essere formulato con la domanda: perché un numero di regioni dell'ordine di 10^3 hanno un così eccezionale *fine tuning*¹ in termini di temperatura se non sono mai state in contatto termico tra loro prima dell'emissione della CMBR?

Se si volesse calcolare di che entità dovrebbero essere state le fluttuazioni di densità $\delta \equiv \delta\rho/\rho$ al tempo di Plack per ottenere un $\delta_{re} \simeq 10^{-4}$, si troverebbe $\delta_P \simeq 10^{-61}$! Essendo questo valore troppo piccolo per essere considerato una condizione iniziale fisicamente accettabile, il paradosso dell'orizzonte appare quindi una reale e profonda inconsistenza concettuale del Modello Cosmologico Standard.

Il paradosso della piattezza

Come già visto nel capitolo precedente, il parametro che caratterizza la geometria locale dell'Universo descritto dalla metrica RW, è Ω . Il valore attuale Ω_0 , strettamente collegato alla densità di materia dalla (1.20), può essere dedotto da una misura della curvatura dello spazio-tempo. Quest'ultima può essere ricavata indirettamente dalle misure delle fluttuazioni di temperatura del CMBR. Si ottiene quindi $|\Omega_0 - 1| \lesssim 0.01$, cioè che l'Universo è attualmente molto vicino alla densità critica, e quindi prevalentemente piatto.

D'altra parte, ricordando che $\Omega \propto R^2 \rho$ per l'equazione di Friedmann, e $\rho_m \propto R^{-3}$ e $\rho_r \propto R^{-4}$, è possibile scrivere Ω in funzione del redshift:

$$\begin{aligned} (\Omega - 1) &\propto (1 + z)^{-1} & [MD] \\ (\Omega - 1) &\propto (1 + z)^{-2} & [RD] \end{aligned}$$

E considerando il valore attuale di $|\Omega_0 - 1|$, si può ottenere alla scala di Planck ($z_P \sim 10^{32}$) che

$$|\Omega - 1| \lesssim \mathcal{O}(10^{-62})$$

e quindi $R_{curv} \gtrsim 10^{30} H^{-1}$

Se si ponessero condizioni al tempo di Planck leggermente differenti, l'Universo in cui viviamo sarebbe radicalmente diverso²: avrebbe già collassato o si sarebbe espanso velocemente fino a trovarsi in uno stato pochissimo denso e molto freddo. Così come nel caso del paradosso dell'orizzonte, la condizione iniziale compatibile con la piattezza osservata oggi richiede un estremo fine tuning; il *flatness puzzle* può quindi essere considerato un ulteriore punto debole di FRW.

¹L'espressione inglese *Fine tuning* è utilizzata solitamente in fisica in riferimento all'aggiustamento di alcuni parametri di un modello che rende quest'ultimo in ottimo accordo con le osservazioni sperimentali.

²Occorre ricordare che a tal proposito si sviluppò, negli anni '70, un ampio dibattito su quello che venne denominato *Principio antropico*, secondo cui *l'Universo deve avere quelle proprietà che permettono alla vita di svilupparsi al suo interno ad un certo punto della sua storia*. Questa assunzione è spesso criticata per la sua mancanza di capacità predittive.

2.3 Entropia

La densità di entropia $s = S/V = (\varrho + p)/T$, può essere espressa all'equilibrio in termini della temperatura dei fotoni, considerando l'Universo dominato da particelle relativistiche. Si ha:

$$s = \frac{2\pi^2 g}{45} T^3 \sim T^3$$

dove g è la degenerazione dovuta a ulteriori gradi di libertà, e a temperature ordinarie può considerarsi costante. Si è visto (1.39) che la dimensione dell'Universo osservabile è dell'ordine del raggio di Hubble H^{-1} ; questo ci permette di calcolare l'entropia osservabile al tempo presente:

$$S \simeq (T_0 \gamma H^{-1})^3 \sim 10^{87}$$

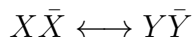
dove si è usata la temperatura dei fotoni della CMBR $T_\gamma \simeq 2.73K$. Se l'espansione deve conservare l'entropia³, un valore così elevato rappresenta anch'esso una condizione iniziale al tempo dell'ultimo scattering CMBR molto *molto* particolare.

2.4 *Unwanted Relics*: i fossili indesiderati

Un ulteriore paradosso si genera dalla considerazione che avendo assunto molto alta la temperatura dell'Universo primordiale, ci si dovrebbe aspettare, in accordo con le predizioni delle teorie di unificazione e della supersimmetria, un'abbondanza di particelle X pesanti ($m_X > 100 \text{ GeV}$), per le quali $\Omega_X \gg 1$, delle quali non rimane tuttavia alcuna traccia nell'Universo osservato oggi. Queste particelle vengono quindi denominate *relics*⁴.

La predizione di una simile abbondanza anche al tempo presente può essere dedotta attraverso una serie di semplici considerazioni.

Nei primi istanti di vita dell'Universo le X si trovano all'equilibrio con le altre particelle nel plasma cosmico, annichilandosi rapidamente e ripetutamente con reazioni del tipo:



dove Y è una generica particella. La creazione di X avviene fino a che la temperatura $T > m_X$, cioè fino a quando è possibile generare X ; l'annichilazione fino a quando la distanza relativa tra una coppia di X è abbastanza piccola da permettere la reazione, e quindi il tasso di annichilazioni era grande confrontato al tasso di espansione: $\Gamma_X = n_X \langle \sigma_X v \rangle \gg H$, dove $\langle \sigma_X v \rangle$ è la sezione d'urto media per la velocità.

Si hanno quindi due fasi: nella prima le X si annichilano e si creano all'equilibrio termico. Appena $T \lesssim m_X$, si "spegne" la reazione $Y\bar{Y} \rightarrow X\bar{X}$, e il

³E' possibile mostrare che nella termodinamica di FRW vale la legge: $d(p + \varrho)/dT$

⁴La cui traduzione dall'inglese è *fossili, relitti*.

numero di particelle X decresce esponenzialmente, a causa delle continue annichilazioni $X\bar{X} \rightarrow Y\bar{Y}$. Nel momento in cui $\Gamma_X(t_f) \simeq H(t_f)$, le annichilazioni diminuiscono e il numero di X per unità di volume co-movente si congela; questo processo viene comunemente denominato *freeze-out*. Dopo t_f la densità n_X inizia a diminuire, per “diluizione” nell’Universo in espansione, evolvendo secondo la (1.27): $n_X(t > t_f) = n_X(t_f)[R(t_f)/R(t)]^3$, lasciando però invariato il numero totale $N_X(t_f)$ di particelle.

Se si considera la fase del freeze-out come una fase intermedia, durante la quale le X erano non-relativistiche, è possibile risolvere l’equazione di Boltzmann e ottenere:

$$n_X(t_f) \simeq \int n_X(t) dV \propto \frac{1}{m_X \sigma_{Xf}}$$

dove σ_{Xf} è $\langle \sigma_X v \rangle$ al tempo t_f . E’ inoltre noto che per una specie del tipo dell’ X $\sigma_{Xf} \propto 1/m_X$, da cui segue che $n_X(t_f) \sim \text{cost.}$, cioè il numero di particelle X presenti all’epoca del *freeze-out* non dipende dalla massa e dalla sezione d’urto della particella.

La densità si può quindi scrivere come:

$$\varrho_X(t_f) = m_X n_X(t_f) \propto m_X$$

Abbiamo mostrato quindi che, essendo $m_X \sim 100$ GeV, il numero di particelle X che dovremmo osservare al tempo presente è tutt’altro che trascurabile. In definitiva si dovrebbe quindi avere:

$$\Omega_X(t_f) \equiv \frac{\varrho_X(t_f)}{\varrho_c} \propto m_X \quad \Rightarrow \quad \Omega_X(t_f) \gg 1$$

che implicherebbe un valore di $\Omega_{tot} > 1$ al tempo presente, il che è in netto disaccordo con i dati osservativi per i quali si ha $\Omega_{tot} \simeq 1$.

Capitolo 3

Inflation

Essentially, all models are wrong; but some are useful.
Empirical Model-Building, G. E. Box

Come si è visto nel precedente capitolo, la previsione del Modello Cosmologico Standard del Big Bang come origine dell'Universo porta con sé delle apparenti inconsistenze che richiedono una riconsiderazione dell'evoluzione dell'Universo Primordiale. Per circa un decennio i cosmologi lavorarono ad un aggiustamento nell'intento di trovare una spiegazione al *fine tuning* sulle condizioni iniziali ottenuto dall'applicazione del modello e dall'imposizione delle condizioni osservate al tempo attuale. Ripercorriamo in breve le tappe più importanti di quel periodo.

Nei primi anni '70 Zeldovich portò alla ribalta il paradosso della piattezza e quello degli orizzonti, e spinse Belinski e Khalatnikov a studiare un modello caotico in cui l'Universo era soggetto a oscillazioni attorno ad una singolarità, contraendosi ed espandendosi. Misner in seguito cercò di sfruttare questo modello caotico per risolvere i paradossi di FRW, utilizzando una metrica anisotropa di Bianchi. Il tentativo ebbe scarso successo.

Verso la fine del decennio, vennero alla luce gli altri paradossi e Starobinsky notò che le correzioni quantistiche alla relatività generale potevano essere determinanti nell'Universo primordiale. In particolare tali fluttuazioni dovevano condurre a correzioni quadratiche nella curvatura da inglobare nell'azione del campo gravitazionale usata da Einstein per ricavare le 1.1. In presenza di queste correzioni, e per curvatura grande, la soluzione presentava un termine cosmologico costante, e quindi una fase di crescita esponenziale del fattore di scala (si veda la (1.37)), detta soluzione inflazionaria o di *de-Sitter*.

Alan Guth [16], nel 1981, sfruttando le scoperte di Coleman sulle transizioni di fase quantistiche, propose una diversa soluzione basata sull'ipotesi che l'Universo alle sue origini si trovasse in una fase dominata dall'energia del vuoto, la cui evoluzione doveva esser stata guidata da un potenziale scalare inizialmente in fase di falso vuoto (minimo locale ma non globale), la cui barriera sarebbe stata oltrepassata con un effetto di *tunnelling* provocato dalle fluttuazioni quantistiche primordiali.

Più tardi, nel 1982, Andrei Linde [17], Andreas Albrecht e Paul Steinhardt [18] proposero una *slow roll Inflation* nella quale non è presente alcuna barriera di falso vuoto. Ci si riferisce a quest'ultimo scenario con l'appellativo *new Inflation*.

3.1 La soluzione di *de Sitter*

Il comun denominatore delle teorie di Starobinsky, Guth e Linde è un'evoluzione del fattore di scala di tipo esponenziale nell'Universo Primordiale. Come si è visto nella sezione 1.6, una soluzione di questo tipo è prevista per un modello di Universo piatto dominato dall'energia del vuoto. L'idea di base dell'*Inflation* consiste nell'ipotizzare l'esistenza di un'epoca nella quale l'energia del vuoto è stata la componente dominante della densità di energia dell'Universo, e un piccolo volume causalmente correlato di dimensioni inferiori al volume di Hubble in quell'istante si è potuto espandere fino a raggiungere dimensioni comparabili a quelle dell'Universo attuale.

La soluzione descritta prende il nome di *soluzione di de Sitter*, e prevede:

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad p_\Lambda = -\frac{\Lambda}{8\pi G}$$

con l'equazione di stato $\rho = -p$, cioè $w = -1$. Il tensore energia impulso associato a questo contributo è identico (a meno di un fattore $8\pi G$) al termine cosmologico che prima Einstein, e in seguito Starobinsky inserirono arbitrariamente nell'azione del campo gravitazionale. Per questo motivo, nella moderna cosmologia si parla equivalentemente di termine cosmologico o energia del vuoto, seppure la differenza concettuale sia sostanziale, poiché nel secondo caso non si tratta di una aggiunta arbitraria ingiustificata al primo membro della (1.2), ma di un contributo attribuibile al secondo membro, realmente osservato nella composizione dell'Universo attuale.

Le caratteristiche fondamentali della *de Sitter phase* possono quindi essere riassunte dalle equazioni:

$$\begin{aligned} \rho_\Lambda &= \frac{\Lambda}{8\pi G} = \text{const.} \\ H &= \sqrt{\frac{8\pi G \rho_\Lambda}{3}} = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} = \text{const.} \\ R(t) &\propto e^{Ht} \end{aligned}$$

L'espansione accelera con il tempo, e l'energia totale per unità di volume comovente

$E_T \propto R^3 \rho_\Lambda$ cresce esponenzialmente.

3.2 Il meccanismo dell'*Inflation*

L'ingrediente fondamentale per un'*Inflation* esponenziale caratterizzata da una fase di *de Sitter*, è un'equazione di stato con $w = -1$. Come già accennato, il

modello inflazionario più comune è basato sull'esistenza di campi scalari, cioè di particelle a spin zero che si trasformano come scalari, quindi invarianti rispetto ad un qualsiasi cambio di coordinate. In un Universo omogeneo un campo scalare è funzione soltanto del tempo. Per un generico campo ϕ nello spazio omogeneo e isotropo, usando quindi $T_{\mu\nu} = \text{diag}(-\rho, p, p, p)$, le espressioni della densità e della pressione sono:

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (3.1)$$

$$p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (3.2)$$

Il potenziale $V(\phi)$ quantifica l'energia interna associata ad un dato valore di ϕ , e come ogni sistema, un Universo in cui è presente un campo scalare tende a minimizzare quest'energia. I campi scalari più comuni per i diversi modelli di Inflation sono *di Higgs*, auto-interagenti, e massivi, con diverse espressioni del potenziale V :

$$V_H(\phi) = \lambda(\phi^2 - M^2)^2 \quad (3.3)$$

$$V_m(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad (3.4)$$

$$V_{SI}(\phi) = \lambda\phi^4 \quad (3.5)$$

Le equazioni (3.1),(3.2) nel caso in cui $\dot{\phi} \ll V$ si riducono all'equazione di stato $p = -\rho$, tipica di una soluzione alla *de Sitter*. Questo è il punto cruciale della teoria: è possibile ipotizzare che l'Universo primordiale fosse dominato da un campo scalare ϕ con energia cinetica quasi nulla, e questa ipotesi implica l'esistenza di una fase di espansione di *de Sitter*, analoga a quella che si avrebbe in un Universo dominato dalla costante cosmologica.

Le equazioni del moto per un Universo in espansione con un campo scalare si possono ottenere sostituendo la (3.1) e la (3.2) nell'equazione di Friedmann (1.17), ignorando il termine di curvatura k :

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[V(\phi) + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \right] \quad (3.6)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -\frac{dV(\phi)}{d\phi} = -V'(\phi) \quad (3.7)$$

che sono le equazioni del moto di una massa che scende un dosso sotto l'azione di una forza d'attrito (qui dovuta all'espansione dell'Universo). La condizione di espansione accelerata

$$\ddot{R} > 0 \iff p < -\rho/3 \iff \dot{\phi}^2 < V(\phi)$$

ci conferma che si ha Inflation solo quando domina l'energia potenziale: diventa di fondamentale importanza quindi stabilire che forma abbia $V(\phi)$, affinché l'espansione esponenziale risolva i paradossi del Modello Standard.

Una prima richiesta da fare sul potenziale è che presenti una buca di minimo globale in $\phi = \sigma$, e che la particella ϕ abbia un tempo di decadimento finito. Questa condizione esclude la possibilità di un'espansione esponenziale eterna, che non spiegherebbe la temperatura e la densità di energia dell'Universo nel suo stato attuale.

Una seconda condizione è che il potenziale oscilli intorno al valore minimo $V(\sigma)$; lo smorzamento delle oscillazioni, dovuto al decadimento delle particelle ϕ in prodotti di materia ordinaria (fotoni, barioni, ecc.), condurrebbe ad un surriscaldamento dell'Universo, detto *reheating*, causato dalla termalizzazione dei prodotti di decadimento. Al termine di questa fase, nella quale sarebbe dominato dalla radiazione, l'Universo riprenderebbe la sua espansione secondo il modello di Friedmann dominato dalla radiazione (1.36), e soltanto in un'epoca successiva, secondo il modello di Friedmann dominato dalla materia (1.35).

La forma più generale di potenziale $V(\phi)$ è rappresentata in Fig.3.1. Caratteristica comune a tutti i modelli inflazionari è la piattezza di V , cui ci si riferisce spesso con il nome di *approssimazione di slow roll*. Fu suggerita da Linde per correggere il modello precedente di Guth, che prevedeva uno stato iniziale metastabile di falso vuoto, dal quale si sarebbe raggiunto il minimo grazie all'effetto tunnel provocato da fluttuazioni quantistiche. Questo modello non poteva condurre a un *reheating* spontaneo e alla risoluzione dei paradossi contemporaneamente, e fu per questo abbandonato.

Il valore del potenziale del campo scalare ϕ in $t = t_I$, che come visto ha un'equazione di stato che permette l'espansione alla *de Sitter*, rappresenta l'energia totale dell'Universo dello stato iniziale pre-inflazionario che non è quindi attribuita al termine cosmologico Λ . In alcuni modelli, come in quello inizialmente proposto da Guth, è presente in una prima fase dell'Inflation una barriera di potenziale che viene oltrepassata dal campo prima di raggiungere la zona di *slow roll*.

Effetti dell'Inflation

Una delle conseguenze banali dell'Inflation è che nella trattazione dinamica dell'Universo diventa quasi irrilevante il ruolo della storia pre-inflazionaria, che fornisce soltanto le condizioni iniziali per la fase inflazionaria. Cosa accade durante la fase di espansione alla *de Sitter*? La risposta è: quello che volevamo che accadesse. Si possono risolvere le equazioni del moto nell'approssimazione di *slow roll*, e riferirci all'effetto dell'Inflation in termini del fattore:

$$N \equiv \ln \frac{R(t_F)}{R(t_I)} = \int_{t_I}^{t_F} H dt \simeq -8\pi G \int_{\phi_I}^{\phi_F} \frac{V}{V'} d\phi$$

grazie al quale è possibile quantificare l'effetto dell'Inflation sulle dimensioni dell'Universo, che alla fine della *de Sitter phase* saranno aumentate di un fattore e^N . Nei modelli inflazionari più diffusi si fa risalire l'inizio dell'Inflation al tempo $t_I = 10^{-32}s$ ($T \sim 10^{14}$ GeV) tipico della scala di energia delle teorie di Grande

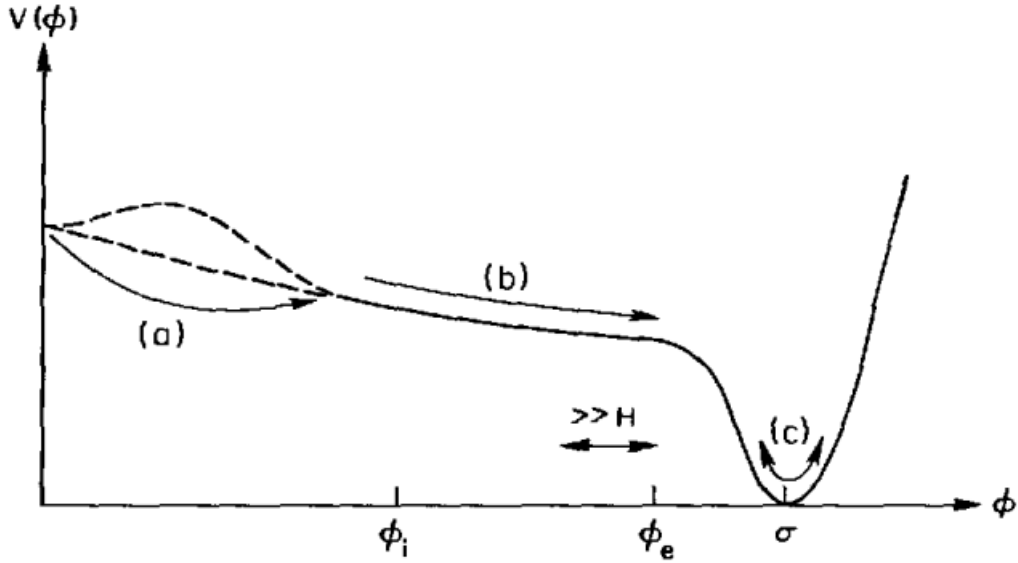


Figura 3.1: Illustrazione schematica di un potenziale inflazionario. Sono rappresentate tre fasi qualitative: (a) penetrazione di un'eventuale barriera; (b) *slow roll*; (c) oscillazioni intorno al minimo del potenziale.

Unificazione, e la fine della *de Sitter phase* al tempo¹ $t_F = 10^{-34}$. Questa assunzione abbastanza ragionevole ci permette di calcolare il valore di N necessario per risolvere i paradossi cosmologici. Come si vedrà nella prossima sezione, il valore di N necessario a risolvere, ad esempio, il paradosso della piattezza è $N \sim 62 \sim \ln(10^{27})$.

Durante l'Inflation quindi le dimensioni dell'Universo aumentano di circa un fattore 10^{27} , la densità di materia, di radiazione e la temperatura dell'Universo diminuiscono secondo le leggi:

$$\rho_r \propto R^{-4} \sim e^{-4N} \rightarrow 0 \quad (3.8)$$

$$\rho_m \propto R^{-3} \sim e^{-3N} \rightarrow 0 \quad (3.9)$$

$$T(t) \propto R^{-1} \propto e^{-N} \rightarrow 0 \quad (3.10)$$

3.3 La soluzione dei paradossi

Mettiamo adesso in luce perché il paradigma inflazionario rappresenta un'ottima soluzione a tutti i paradossi del Modello Cosmologico Standard e un buon modello per i primi istanti di vita dell'Universo.

Ricordiamo che, poiché $w = -1$, nella fase di *de Sitter* il parametro di decelerazione q è negativo :

¹In realtà c'è un range abbastanza largo per la scelta di t_F e t_I , il cui limite inferiore è di qualche ordine di grandezza superiore alla scala di Planck

$$q = -\frac{\ddot{R}}{RH_0^2} = \Omega(1 + 3w)/2 = -\Omega \Rightarrow \ddot{R} > 0 \quad (3.11)$$

Piattezza Questa semplice osservazione ci permette di mostrare come l'Inflation risolva piuttosto banalmente il paradosso della piattezza. Derivando nel tempo l'espressione $1/H^2R^2$, e dalla (3.11):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{H^2R^2} \right) = \frac{d}{dt} (\dot{R}^{-2}) = -2\dot{R}^{-3}\ddot{R} < 0 \quad (3.12)$$

Richiamando l'equazione di Friedmann 1.20:

$$\Omega(t) - 1 = \frac{k}{H^2R^2(t)}$$

è evidente che, essendo H^2 costante, quando R^2 cresce esponenzialmente $1/H^2R^2$ decresce e $\Omega(t) \rightarrow 1$. In particolare, utilizzando la relazione tra Ω e R e ricordando che subito dopo il reheating si ha un'epoca dominata dalla radiazione di durata $\Delta t_{rad} \simeq 3 \cdot 10^{17}$ s, per la quale $|\Omega - 1| \propto t [RD]$, si trova:

$$|\Omega - 1| \leq 0.01 \Rightarrow |\Omega(t_F = 10^{-34} s) - 1| \leq 3 \cdot 10^{-54}$$

Poiché durante l'Inflation $H = cost.$, quindi $|\Omega - 1| \propto R^{-2}$:

$$\left[\frac{R(t_F)}{R(t_I)} \right]^{-2} \lesssim 10^{-54} \Rightarrow N \gtrsim \ln(10^{27})$$

che ci dà l'entità dell'espansione che permette di risolvere il paradosso. Si può concludere che la curvatura diminuisce nella fase di Inflation, rendendo Ω_0 esponenzialmente vicino a 1. L'Universo quindi, a dispetto di qualsiasi condizione iniziale e delle richieste di *fine tuning*, si sarebbe espanso accelerando e appiattendosi.

Orizzonti Come si è visto nel capitolo precedente, se l'Universo si espande secondo l'equazione di Friedmann, due punti osservati sulla volta celeste a una distanza angolare relativa $\alpha > 3^\circ$ appartengono a zone causalmente sconnesse, cioè nel tempo impiegato da un fotone che giunge nel presente ad un osservatore sulla Terra, nessun altro fotone ha potuto percorrere la distanza tra i due punti. Questo avviene poiché l'orizzonte di particella, che nel modello di Friedmann è dello stesso ordine di grandezza del raggio di Hubble, cresce più rapidamente ($\propto t$) che la distanza tra due punti ($\propto t^n, n < 1$), come mostrato nella (1.39). Pertanto, se l'espansione fosse avvenuta secondo il modello di Friedmann, ci si aspetterebbe che molte regioni inizialmente sconnesse causalmente siano entrate nell'Universo attualmente osservabile.

Consideriamo invece due punti osservati all'interno del volume di Hubble $H(t_I)$, quindi all'interno di una regione causalmente connessa, nell'istante in cui inizia l'Inflation. Durante la fase di de Sitter $H^{-1} = cost.$, ma la distanza relativa

tra i punti è aumentata di un fattore $e^N \sim 10^{27}$! In breve tempo, i punti non saranno più entrambi nello stesso volume di Hubble. Quindi anche se fossero stati uno al di fuori dell'orizzonte di particella dell'altro all'epoca dell'ultimo scattering, avrebbero già avuto un contatto termico quando erano nella stessa regione causale prima dell'Inflation. Il paradosso degli orizzonti quindi svanisce.

Il calcolo svolto nella sezione 2.2, per mostrare che l'orizzonte di particella al tempo dell'ultimo scattering CMBR fosse molto minore della distanza relativa tra i due punti distanti angularmente più di 3° , si rivela fondamentalmente errato. La ragione di ciò è da ravvisare nel fatto che in un'espansione alla Friedmann l'orizzonte di particella $d_H \propto H^{-1}$ viene identificato con il raggio di Hubble, ma nella fase di Inflation le distanze fisiche si dilatano esponenzialmente e con esse l'orizzonte, mentre H rimane costante: quindi l'identificazione non è permessa, e una delle relazioni utilizzate nel calcolo di cui sopra viene a cadere.

Può essere svolto un calcolo esatto confrontando i due orizzonti di particella calcolati secondo l'espressione sempre valida (1.38):

$$R(t) \int_{t_I}^{t_{LS}} \frac{dt'}{R(t')} \simeq H^{-1} (e^{H\Delta t} - 1) \simeq H^{-1} e^N \gg R(t) \int_{t_{LS}}^{t_0} \frac{dt'}{R(t')} = 2H^{-1}$$

dove $t_{LS} \sim t_{rec}$ è il tempo della ricombinazione, e t_I segna l'inizio dell'Inflation. In definitiva quindi, in riferimento alla Fig.1.4: $\chi_{ls} \gg \chi_{horiz}$, e in Fig.2.1: $\eta_2 \gg \eta_e$; presi quindi due punti con distanza angolare relativa maggiore a 3° , il tempo impiegato da un fotone per metterli in contatto è minore di quello impiegato per giungere ad un osservatore sulla Terra nel tempo presente.

Entropia L'entropia dell'Universo pre-inflazionario può essere stimata come

$$S_i \simeq (T_C H_i^{-1})^3 \simeq 10^{14}$$

dove $T_C = 10^{14} \text{ GeV}$ e $H_i^{-1} = 10^{-23} \text{ cm}$. Si noti che il valore di S_i è molto inferiore a quello presente. Durante l'espansione esponenziale e il conseguente raffreddamento $T \propto e^{-Ht}$, l'entropia rimane costante. Dopo il *reheating* non-adiabatico la temperatura ritorna a T_C e l'entropia aumenta secondo la legge

$$S_f \simeq e^{3H\Delta t} (T_C H^{-1})^3 \sim 10^{130}$$

dove si è usato il tempo di *reheating* $\Delta t = 100H^{-1} \simeq 10^{-32} \text{ s}$. Il valore di S_f è molto maggiore del valore S_0 dell'Universo osservabile. Ma ricordando che dopo l'Inflation $R \propto T^{-1}$, si trova che il nostro volume di Hubble rappresenta soltanto una piccola parte dell'Universo post-inflazionario (circa 30 cm contro $3 \cdot 10^{20} \text{ cm}$). L'altissimo valore di entropia del nostro Universo non è quindi un'inspiegabile inconsistenza del modello standard, ma una conseguenza della dinamica primordiale.

Fossili indesiderati Infine, consideriamo un *unwanted relic* X prodotto prima dell'Inflation, con una certa abbondanza $n_X(t_I)$. A causa della rapida espansione le particelle X vengono diluite esponenzialmente e in pochi istanti il loro numero totale N_X diventa trascurabile, e quindi è quasi nulla la probabilità di osservarle entro l'orizzonte attuale. Dopo la fase inflazionaria, la densità di energia dell'Universo aumenta con il *reheating*, fino a valori tali da permettere la creazione della materia ordinaria, ma non delle particelle più pesanti come l' X , che rimangono costanti in numero fino al tempo presente.

Bibliografia

- [1] I. Newton. *Philosophia Naturalis Principia Mathematica* (1687)
- [2] A. Einstein. *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*. *Annalen der Physik* **49**, p.50 (1916) Traduzione inglese: *The foundation of the general theory of relativity* disponibile in *The Principle of Relativity*, pp. 109-164, Dover Publications, New York (1953)
- [3] A.A. Penzias, R.W. Wilson. *A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s*.
Astrophysical Journal **142**, p.419-421 (1965)
- [4] G. Gamow, *The evolution of the universe*.
Nature **162**, p.680-682 (1948)
- [5] A. Einstein. *Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie*. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften* (Berlin), Seite 142-152. Traduzione inglese: *Cosmological consideration on the general theory of relativity* disponibile in *The Principle of Relativity*, pp. 175-188, Dover Publications, New York (1953)
- [6] E. Hubble, *A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae*.
Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America **15**, p.168-173 (1929)
- [7] L.D. Landau, E.M. Lifshits *Fisica teorica vol.2, Teoria dei campi*.
Editori Riuniti (2004)
- [8] H.P. Robertson, *Kinematics and world structure*.
Astrophysical Journal **82**, p.348-301 (1935)
- [9] A. G. Walker, *On Milne's theory of world-structure*.
Proceedings of the London Mathematical Society 2 **42**. p.90-127 (1937)
- [10] S. W. Hawking, *The occurrence of singularities in cosmology. III Causality and singularities*.
*Proc. R. Soc. Lond.***A300**, p. 187-201 (1967)
- [11] R.Penrose, *Gravitational collapse and space-time singularities*.
Phys. Rev. Lett. **14**, p.57-59 (1965)

- [12] A.Friedman, *Über die Krümmung des Raumes.*
Zeitschrift für Physik **A10**, p.377-386 (1991)
- [13] G. Lemaître, *Un Univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques.*
Annales de la Société Scientifique de Bruxelles **47**, p.49 (1927)
- [14] Komatsu et al., *Seven-year wilkinson microwave anisotropy probe (WMAP) observations: cosmological interpretation.*
arXiv:1001.4538v2 [astro-ph.CO] (2010)
- [15] E.Kolb, M.S. Turner. *The Early universe.*
Addison-Wesley, New York (1994)
- [16] A. H. Guth. *Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems.*
Phys. Rev. **D 23**, 347 (1981)
- [17] A. Linde. *A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution Of The Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy And Primordial Monopole Problems.*
Phys. Lett. **B 108**, 389 (1982)
- [18] A.Albrecht, P. J. Steinhardt. *Cosmology For Grand Unified Theories With Radiatively Induced Symmetry Breaking.*
Phys. Rev. Lett. **48**, 1220 (1982)